—

數值

博士班入學考

題目共五題，每題二十分。

1. 簡答題(需解釋你的說法)：

   (a) 某數值微分法的截去誤差 (truncation error) 為 $O(h^n)$，請問在實際計算上，是否 h 越小，數值微分值會越靠近函數真正的微分值？

   (b) 某數值積分法的截去誤差 (truncation error) 為 $O(h^n)$， h 為點之間的距離，某生將此數值積分法寫成一個程式，請問他該如何利用此程式驗算此截去誤差式子內的 n 之值？

   (c) 若使用 cubic spline 方法對 n 個點作差分，請推導出為何 cubic spline 所產生的條件數量會比曲線實際需求的總數少兩個？

   (d) 某平滑 f(x) 函數可使用泰勒展開式表示為，

   $$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{2!}\,f''(0) + \cdots + + \frac{x^n}{n!}\,f^n(0) + \cdots$$

   若已知 $f(0)$, $f'(0)$, ..., $f^n(0)$ 之值，請問如何以最有效率的方式來計算泰勒展開式的前 n 項和，寫出你的演算方式。

2. 若 f(x) 函數在 x = r 上有 m 個重根，既 $f(x) = (x-r)^m\, q(x)$，請推導牛頓迭代法的收斂階數 (rate of convergence) 為 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \dfrac{1}{m}$。

3. 對 $n \times n$ 的矩陣，推導出 Gauss Elimination 對加/減，乘，除的總計算次數分別為 $O(\frac{n^3}{3})$、$O(\frac{n^3}{3})$、$O(\frac{n^2}{2})$。

4. 微分方程組

   $$\begin{aligned} u_1'(t) &= a\,u_1 - b\,u_1\,u_2 \\ u_2'(t) &= c\,u_1\,u_2 - d\,u_2 \end{aligned}$$

   為所謂 predator-prey 問題，其中 t 為時間單位，$u_1(t)$ 為獵物的數量， $u_2(t)$ 為捕獵者的數量。若分別使用 modified Euler 與 Runge-Kutta 四階方法來求計算此微分方程組的近似根，請分別寫出各個計算方法的迭代公式？

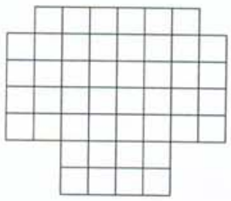
Modified Euler 公式：

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h\,f(x_i\,,\,y_i) \\
k_2 &= h\,f(x_i + h\,,\,y_i + k_1) \\
y_{i+1} &= y_i + \tfrac{1}{2}\,(k_1 + k_2\,)
\end{aligned}
$$

Runge-Kutta 4th order 公式：

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h\,f(x_i\,,\,y_i) \\
k_2 &= h\,f(x_i + \tfrac{h}{2},\,y_i + \tfrac{k_1}{2}) \\
k_3 &= h\,f(x_i + \tfrac{h}{2},\,y_i + \tfrac{k_2}{2}) \\
k_4 &= h\,f(x_i\,,\,y_i + k_3) \\
y_{i+1} &= y_i + \tfrac{1}{6}\,(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\,)
\end{aligned}
$$

5. 考慮一個二維空間的熱傳問題： $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ ，其中 T 為溫度，t 為時間，邊界點的溫度都為已知，同時有適當的起始條件。假設計算的區域已被分成網格如下：



某生在時間軸上使用兩點向後差分 (backward difference) 的方法，在空間上則分別使用有限差分法 (finite difference mathod) 與有限元素法 (finite element method) 來求解，則請回答以下問題：

(a) 有限差分法：若在 X 與 Y 空間軸上都使用三點的中點差分 (central difference)，請問所組出的矩陣的大小為何，同時矩陣中非零元素與零元素的個數分別為何？

(b) 有限元素法：若使用線性元素 (linear element) 來求解，則組出矩陣中的非零元素與零元素的個數分別為何？