

所別：數學系碩士班 不分組 科目：數值分析

4. 若有一聯立方程組如下，

$$T(v) = T(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$v = (x, y, z)$ ，若  $v_n = (x_n, y_n, z_n)$ ，請導出牛頓迭代法的迭代公式為

$$v_{n+1} = v_n - \begin{bmatrix} f_x(v_n) & f_y(v_n) & f_z(v_n) \\ g_x(v_n) & g_y(v_n) & g_z(v_n) \\ h_x(v_n) & h_y(v_n) & h_z(v_n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f(v_n) \\ g(v_n) \\ h(v_n) \end{Bmatrix}$$

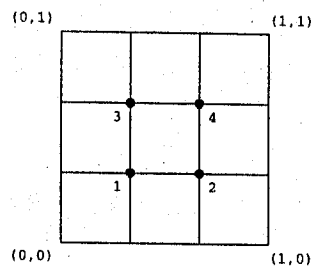
這裡的  $f_x(v_n)$  為  $f(v_n)$  對  $x$  的偏微分，其它依此類推

5. 若將聯立方程式寫成  $Ax = b$  表示，其中  $A$  為  $n \times n$  的矩陣， $x$  與  $b$  皆為  $n \times 1$  的向量，今若使用高斯消去法求  $x$  的數值解，請推演在計算上共須要使用到  $O(n^3)$  的計算量。如果矩陣  $A$  為所謂的三列對角矩陣 (tridiagonal matrix)，則又須要使用多少的計算量。
6. 使用五點的差分公式 ( five-point formula ) 計算以下的問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 5 \quad \text{in } (0, 1) \times (0, 1)$$

$u$  在邊界上的數值為 0，請使用區間大小  $h = \frac{1}{3}$  的方式組成矩陣型式  $Au = b$ ，則  $A$  與  $b$  分別為何

註：  $A$  為  $4 \times 4$  的矩陣， $b$  為  $4 \times 1$  的向量，不須計算  $u$  的解



參考用