

# 大學甄試入學考試

## 一. 填充題：共八題，每題五分

(1) 以下四個敘述，何者為真？(可複選)

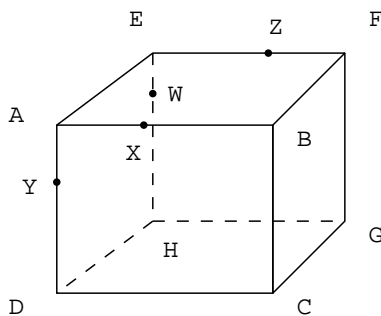
a：若  $x$  為循環小數， $y$  為有理數，則  $x + y$  為有理數

b：若  $x$  為無理數， $y$  為無理數，則  $x + y$  為無理數

c：若  $x, y$  皆為實數，且  $x + y$  為無理數，則  $x$  與  $y$  至少有一個是無理數

d： $x \neq 0$  且  $x$  為有理數， $y$  為無理數，則  $xy$  為無理數

(2) 下圖為一長方體，頂點為 ABCD-EFGH，一平面與線段 AB, AD, EF, EH 分別交於 X, Y, Z, W 四點，假設線段 AB, AD, AE 的長度分別為  $b, d, e$ 。且 AX, AY, EZ 的長度分別為  $x, y, z$ 。請以  $b, d, e, x, y, z$  表示求出線段 EW 的長度

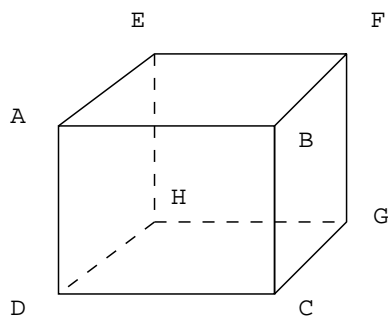


(3) 令直線  $L_1$  與  $L_2$  的方程式分別為  $x - 2y = 1$  與  $2x - y = 0$ ，假設  $P$  點到  $L_1$  的距離為其到  $L_2$  距離的兩倍，求  $P$  的軌跡方程式

(4) 令  $\theta$  為銳角，且  $\tan \theta + \sec \theta = 3$ ，則  $\cos(2\theta)$  為何？

(5)  $\frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2 + 2^2} + \frac{7}{1^2 + 2^2 + 3^2} + \cdots + \frac{2n+1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$  之和為多少？

- (6) 下圖為一長方體盒子,  $AB$ ,  $AD$ ,  $AE$  的長度分別為 10, 6, 5. 今有一蟲子在  $D$  點, 此蟲欲沿著盒面, 取最短路徑爬到  $F$  點, 則此路徑的長度為何?



- (7) 若一數學式為

$$\begin{array}{r}
 \text{F O R T Y} \\
 \text{      T E N} \\
 + \text{      T E N} \\
 \hline
 \text{S I X T Y}
 \end{array}$$

以上各英文字母代表一數字, 且不重覆, 請問 FIFTEEN 為何數字?

- (8) 不等方程式  $(|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 \leq 2$  所圍成的面積為何?

## 二. 演算題：共四題，每題十五分

(1) 試證  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

(2) 猜測以下形式的一般式，並以數學歸納法證明之

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3+5 &= 8 \\ 7+9+11 &= 27 \\ 13+15+17+19 &= 64 \\ 21+23+25+27+29 &= 125 \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

(3) 令  $x, y, z$  為整數，且滿足  $x^2 + y^2 = z^2$ ，證明  $x$  與  $y$  至少有一為偶數

(4) 令圓  $C_1$  的方程式為  $x^2 + (y-5)^2 = 25$ ，及圓  $C_2$  的方程式為  $x^2 + (y-3)^2 = 9$ ，則  $C_2$  內切  $C_1$  於點  $(0,0)$ ，考慮  $C_3$  為內切於  $C_1$ ，外切於  $C_2$  的圓，求所有此類圓  $C_3$  的圓心軌跡方程式

