大 學 甄 試 入 學 考 試

一. 填 充 題：共八題, 每題六分

(1) 若要計算西元 Y 年 M 月 D 日為星期幾可以用以下公式, 使用公式前先要將年份與月份做調整, 基本上, 以下的公式推導是將每年的三月一日當成一年的開始, 如此一來, 原來的三月 (March) 就要當成第一月, 四月被當成二月, 其它則依此類推, 而原有的一月, 二月就被當成十一, 十二月. 此外年份也要加以改變, 推算的日期若在三月之前, 則年份須減一, 例如：公元 2000-1-1 的 Y = 1999, M = 11 , D = 1, 而公元 1999-12-31 的 Y = 1999, M = 10, D = 31.

$$\left(\; \mathtt{Y} + [\,\frac{\mathtt{Y}}{4}\,] - [\,\frac{\mathtt{Y}}{100}\,] + [\,\frac{\mathtt{Y}}{400}\,] + [\,2.6 \times \mathtt{M} - 0.2\,] + \mathtt{D} \; \right) \bmod 7$$

公式中的 $[\mathtt{x}]$ 為 x 的整數部份, 而 x mod y 是指 x 除以 y 的餘數, 當餘數為 0 時, 代表星期天, 餘數為 1 時, 則為星期一, 其它依此類推, 請利用此公式計算公元 2001 年二月的第一個星期天到十月的最後一個星期天的總天數？(天數包含第一天與最後一天)

(2) 今有渡船 3 艘, 每艘渡船最多可載 4 人, 若有 6 人欲渡河, 則安全渡過的方法共有幾種？

(3) 假設 A , B 為獨立事件, 若 $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $P(A\,|\,B) = \frac{3}{5}$, 則 P(B) 為何？

(4) 由 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 十個數字中任選 5 個 (數字不重複), 則其數字和為偶數的情況共有幾種？

(5) 若 $f(x) = \log\left(x^{\log x^2}\right) - \log x^4 + 3$, M 與 m 分別為 $f(x)$ 在 $x \in [5, 100]$ 之間的最大值與最小值, 則 M + m 為何？

(6) 請問使得以下行列式等於零的 x 為何？

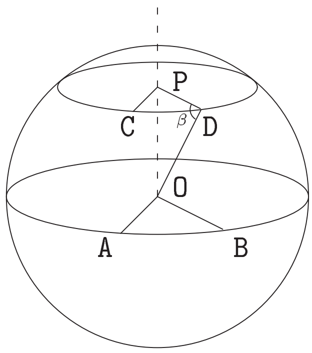
$$\begin{vmatrix} 1 & \log_9 4 & \log_4 9 \\ \mathrm{x} & \log_3 2 & \log_2 3 \\ \mathrm{x}^2 & \log_3 4 & \log_4 3 \end{vmatrix} = 0$$

(7) 若 $a = \log_2\left(\sqrt{11+2\sqrt{30}} + \sqrt{11-2\sqrt{30}}\right)$, $b = \log_4 25$, $c = \log_2 5$, 則三數的大小順序為何？

(8) 若有包含 100 個整數的數列, 數列的數值僅可能為 -2, 0, 3, 假設數列的總數值和為 a, 且數列的各數的絕對值和為 b. 請問數列中有多少數字為零 ？

二. 演 算 題 : 共五題

(1) [十分] 在一圓球中, 赤道 OAB 上, 弧長 AB $= 1113$ 公里, 圓 PCD 上, 弧長 CD $= 1046$ 公里, 若角 $\beta = \angle \mathrm{ODP}$, 且 $\angle \mathrm{AOB} = \angle \mathrm{CPD}$, 則 $\sin 2\beta$ 為何 ?



(2) [十分] 已知 $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$, 則計算 $\sin^4\theta + \sin^6\theta + \cos^4\theta + \cos^6\theta$ 之值

(3) [十分] 若 n 為正整數, 且已知右列所有數 $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \cdots, \mathrm{y}_n$ 皆大於等於 0, 請證明下列不等式, 同時說明等號成立的充要條件為何

$$(\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2^2 + \cdots + \mathrm{x}_n^2)(\mathrm{y}_1^2 + \mathrm{y}_2^2 + \cdots + \mathrm{y}_n^2) \ \geq \ (\mathrm{x}_1\,\mathrm{y}_1 + \mathrm{x}_2\,\mathrm{y}_2 + \cdots + \mathrm{x}_n\,\mathrm{y}_n)^2$$

(4) [十分] 一袋中有若干個紅球與 7 個白球, 今隨意由袋中任取 3 球, 其中為 2 個紅球及一個白球的機率為 $\frac{7}{22}$, 請問袋中紅球的個數為何 ?

(5) [十二分] 若 $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 + a\mathrm{x}^2 + b$ 為一三次的多項式, 已知 $f(\mathrm{x})$ 有一整數根為 n, 請證明以下敘述的正確性

a. 存在有限組整數序對 (a, b), 使得 $f(\mathrm{x})$ 的另外兩個根為有理數

b. 存在有限組整數序對 (a, b), 使得 $f(\mathrm{x})$ 恰好只有一個實數根 (即另外兩個為複數根)