

# 大學申請入學考試

## 一. 填充題 (每題五分)

(1) 計算  $\sum_{n=1}^{72} \cos^3 \frac{n\pi}{8}$  之值為何

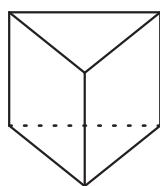
(2) 在  $(x^4 - \frac{1}{x^2})^{12}$  展開式中  $x^{24}$  的係數為何

(3) 若  $x > 1$  且  $\begin{vmatrix} 1 & \log_2 x & \log_2 x \\ 1 & \log_2 x^2 & (\log_2 x)^2 \\ 1 & \log_2 x^3 & (\log_2 x)^3 \end{vmatrix} = 0$ , 則  $x$  之值為何

(4) 若  $F_1 = (3, 4)$  與  $F_2 = (3, -6)$  為平面上兩點, 且  $P$  點在與  $F_1, F_2$  兩點距離差的絕對值為 6 的位置上, 請問  $P$  點所形成的軌跡方程式為何

(5) 若  $a, b, c$  為相異實數, 請解右式方程組之根  $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$

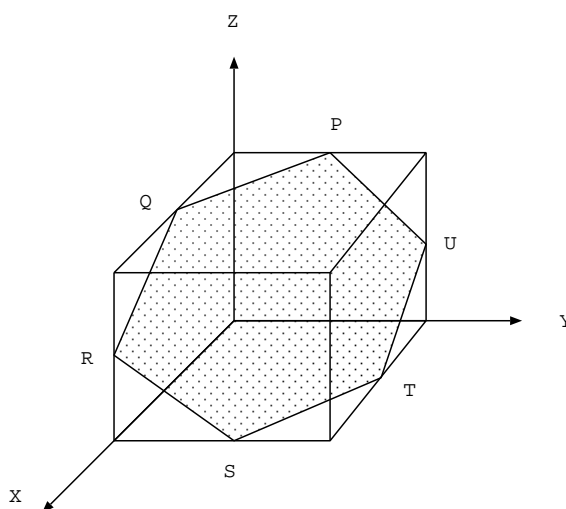
(6) 10 種不同顏色塗料要塗在正三角柱表面上, 假設顏色不重複使用, 總問共有幾種塗法



(7) 若  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$  且  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$  則  $\cos \theta$  與  $\cos 2\theta$  分別為何

(8) 已知  $\frac{\log_{10}(x+1)^2}{\log_{10} 5} = \log_5(x+3)$ , 則  $x$  為何

- (9) 若函式  $H(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  為在以  $x^2 + y^2 = 1$  為底的圓柱體表面上的一曲線線段, 求此曲線長
- (10) 若有一單位正方體如下, 點 P, Q, R, S, T, U 分別為圖形上各所屬邊上的中點, 令 A 與  $ax + by + cz = d$  分別為 P, Q, R, S, T, U 的面積與平面方程式, 則 A 與平面方程式分別為何



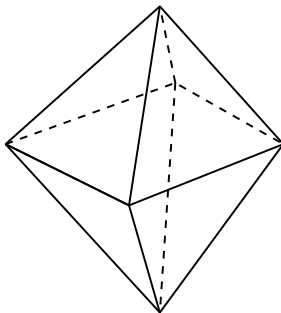
## 二. 演算題 (每題五分, 最後一題十分)

- (1) 美國地震學家 Richter 設定若一地震所發出來的相對能量為  $I$  時, 則此地震強度就定義為  $r = \log_{10} I$ , 已知臺灣在 1999 年的 921 集集大地震強度為 7.3 級, 而美國在 1906 年的舊金山地震強度為 8.9 級, 假設在臺灣集集與美國舊金山兩地震所釋放的相對能量各為  $I_T$  與  $I_U$ , 且以  $\frac{I_U}{I_T} = 10^x$  表示其比值, 請問  $x$  應為多少
- (2) 請用數學方法求得以下運算式的解, 並驗證解是否為唯一

$$\begin{array}{r} a \ b \\ + \quad b \\ \hline b \ a \end{array} \qquad \begin{array}{r} c \ d \\ \times \quad d \\ \hline d \ c \end{array}$$

以上的  $a, b, c, d$  數字可重複, 且皆為不為零的個位數

- (3) 若某正四邊形, 正五邊形與正六邊形三者的周長皆相等, 請用數學方法推論出何者的面積最大
- (4) 令  $f(x)$  為一整數係數的  $n$  次多項式, 若  $f(0)$  與  $f(1)$  都是奇數, 請證明函式  $f(x)$  沒有任何整數根, 也就是說右式的因式分解不存在,  $f(x) = (x - a)g(x)$ ,  $a$  為任一整數
- (5) 若定義一多項式  $f(x) = 5x^3 + 16x^2 + 20x - 28$ , 請問是否可以找到唯一的  $p$  在  $(0, 1)$  之間, 使得  $f(p) = p$
- (6) 在三度空間中的正八面體, 每面均為正三角形, 若三角形的邊長為 1, 求此正八面體的表面積, 體積, 外接球半徑, 內切球半徑



- (7) 今年羊年正月初一為陽曆的 2003 年 2 月 1 日, 若以中國傳統干支表示則為 癸未年 甲寅月 乙巳日, 已知今年的農曆年共有 12 個農曆月, 請問明年猴年正月初一, ( 即陽曆: 2004 年 1 月 22 日 ) 的干支為何

註: 中國傳統的年, 月, 日皆各以 60 干支循環使用, 分別由 10 個天干 (甲, 乙, 丙, 丁, 戊, 己, 庚, 辛, 壬, 癸) 與 12 個地支 (子, 丑, 寅, 卯, 辰, 巳, 午, 未, 申, 酉, 戌, 亥) 各取一個依次循環, 順序為 甲子, 乙丑, 丙寅,  $\dots$ , 癸酉, 甲戌, 乙亥,  $\dots$ , 癸亥 等等, 例如: 民國 73 年 (鼠年) 為甲子年, 則次年的牛年為乙丑年, 若某農曆月為甲寅月, 則次月為乙卯月, 日期也是使用相同的推算方式

- (8) 若  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n > 0$ , 假設  $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  的極限值存在, 則其極限值為何
- (9) 某公司推出甲乙兩種球鞋, 在製造過程中須要用到 A, B 兩種不同機器, 若使用 A 機器, 製作一雙甲球鞋與一雙乙球鞋分別須要 5 分鐘與 4 分鐘, 若使用 B 機器, 則分別須要 6 分鐘與 3 分鐘. 由於設備與人力限制, A 機器每天僅能使用 16 小時, B 機器每天僅能使用 15 小時. 為因應市場須求, 兩種球鞋每天共須製造至少 150 雙, 若甲球鞋的每雙利潤為 1800 元, 乙球鞋為 1000 元, 請問此公司每天應如何生產甲, 乙兩種球鞋各多少雙以求得最大的利潤, 並算出其最大利潤

機器	生產甲球鞋 所須時間	生產乙球鞋 所須時間	每天可操作 時間
A	5 分鐘	4 分鐘	16 小時
B	6 分鐘	3 分鐘	15 小時

球鞋	每雙利潤
甲	1800 元
乙	1000 元